数理解析研究所講究録
第 823 巻 1993 年 73-79

積の正規性と elementary submodel

横浜国大・工　　玉野　研一 (KENICHI TAMANO)

0. はじめに

位相空間論のある種の命題に対しては，証明に elementary submodel の手法を用いると，見通しが非常に良くなる．このことを発見したのは，Dow [D] である．Arhangel'skiĭ や Rudin のある種の定理の，非常に複雑だと思われていた証明は，elementary submodel を用いた見通しのよい証明に書き直せることがわかる．そのような種類の命題は，次のような証明構造をもっている．求めるものは，帰納的に構成する．ある段階まで構成されたとすると，いままで作られたものからある操作によって得られるものをすべて付け加える．そして，また帰納法の次の段階に進んで行く．このようにして最終的に，ある操作に関して閉じている集合が得られる．

以上の証明方法では，ある操作に関して閉じた集合を構成することがポイントである．そのようなものを手っとり早く作れるのが elementary submodel の手法である．Elementary submodel M は，M の有限個の要素から一意的に定義できる要素を最初から全部含んでいるのである．Elementary submodel は，代数での，部分集合から生成される部分群，距離空間での，それを含む完備な距離空間などと同様に，議論の見通しを良くする役割を果たす．

Σ 積の正規性の研究も，elementary submodel の手法が威力を発揮できる場である．実際，筆者は，今まで知られていた Σ 積の正規性の証明を elementary submodel を用いて書き換え，さらに，ある種の Lašnev 空間の正規性の証明を elementary submodel の手法で考えた．その経験で，証明構造の理解を深めたし，また，elementary submodel が新たな発見のための武器としても有効であると感じた．本稿は，Σ 積の正規性の証明を通した，elementary submodel の入門である．最後の節では，Lašnev 空間の Σ 積の正規性に関する未解決問題にふれる．

1. ELEMENTARY SUBMODEL の定義

V を，我々の数学的世界 (universe)，すなわち集合全体のなすクラスとする.（数学的）命題とは，$=, \in, \vee, \wedge, \neg, \forall, \exists$ を用いて表わされる論理式である．集合 M と命題 ϕ に対して，$M \models \phi$（M は，ϕ をみたす）を，ϕ の長さに関する帰納法で，次の条件をみたすように定義する．

$$M \models x = y \iff x = y$$
$$M \models x \in y \iff x \in y$$
$$M \models \neg\phi \iff \neg(M \models \phi)$$
$$M \models \exists x \phi(x) \iff \exists x\,(x \in M \wedge \phi(x)).$$

$M \prec V$（M は，V の elementary submodel である）とは，M の任意の有限個の要素 $b_0, b_1, \ldots, b_n$ と，任意の命題 ϕ に対して，

$$M \models \phi(b_0, b_1, \ldots, b_n) \Longleftrightarrow V \models \phi(b_0, b_1, \ldots, b_n)$$

をみたすことである．$M \prec V$ で，しかも M が可算集合であるとき，M は，可算 elementary submodel という．

2. Elementary submodel の性質

Elementary submodel には，次の 3 つの基本的性質がある．

(a) 任意の可算集合 X に対して，$X \subset M$ を満たす V の可算 elementary submodel M が存在する．

(b) $b_1, b_2, \ldots, b_n \in M$ で，

$$V \models \exists! x \phi(x, b_1, b_2, \ldots, b_n) \wedge \phi(a, b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

ならば，$a \in M$．すなわち，M の有限個の要素を用いて一意的に定義できる集合は，すべて M に属する．

(c) a が可算集合で，$a \in M$ ならば，$a \subset M$ となる．

（例）例えば，空集合は，どんな要素も含まない集合として，M の 0 個の要素を用いて一意的に定義できる．すなわち，

$$\exists! x(\forall y(\neg(y \in x))).$$

したがって，(b) より $\emptyset \in M$．つぎに，1 は，空集合という一つの集合だけを含む集合として，$\emptyset \in M$ を用いて一意的に定義できるので，$1 \in M$．同様に，自然数 n に対して $n \in M$．さらに，ω，ω_1 は，最初の無限順序数，最初の非可算順序数として，定義できるので，$\omega \in M$, $\omega_1 \in M$．

（注意 1）$\phi(x_1, \ldots, x_n)$ と表わしたとき，$x_1, \ldots, x_n$ は，ϕ に現われる自由変数である．したがって，$\forall$ や，$\exists$ がついた変数，すなわち束縛変数ではない．

（注意 2）(a) で，V の可算 elementary submodel が存在するというのは，正確には，誤りである．実用上，そのように思っていても全く支障がないが，正式には，V の代わりに，十分大きな θ に対する hereditarily $< \theta$ 集合 $H(\theta)$ を用いる．Elementary submodel については，参考文献 **[B]** の 919，920 ページの 2 ページの知識があれば，それを用いた位相空間論の論文が十分読みこなせる．参考文献 **[K]** も参照されたい．

（注意 3）初心者はたいてい，ω_1 が可算 elementary submodel M に属しているのに，なぜ，M が非可算集合にならないのだろうと考えこんでしまう．M の住人が見ることのできる ω_1 の要素は，$M \cap \omega_1$ の要素だけである．しかし，M に ω から $M \cap \omega_1$ への全単射が属さないので，M の住人は ω_1 が非可算集合だと判断できるのである．集合 $M \cap \omega_1$ は，M の要素ではないことにも注意しておこう．

3. $\Sigma^{\kappa}\omega$ の正規性

X を位相空間，κ を cardinal とし，X^{κ} に属する点 p を固定する．各 $f \in X^{\kappa}$ に対し，support f を，

$$\text{support}\, f = \{\alpha \in \kappa : f(\alpha) \neq p(\alpha)\}$$

と定義し，p を base point とする Σ 積，$\Sigma^{\kappa}X$ を，

$$\Sigma^{\kappa}X = \{f \in X^{\kappa} : \text{support}\, f \text{ は，高々可算な集合}\}$$

で定義する．ただし，$\Sigma^{\kappa}X$ の位相は，Tychonoff の積空間 X^{κ} の部分空間としての位相とする．

矢島は，Corson, Rudin, Gul'ko らの結果を一般化して，次の結果を得た．ここで，位相空間 X が可算 tightness をもつとは，任意の点 $p \in X$ と，任意の部分集合 $A \subset X$ に対して，もし，$p \in \text{cl}\, A$ ならば，ある可算部分集合 $B \subset A$ が存在して，$p \in \text{cl}\, B$ となることをいう．

<u>定理</u>（矢島 [Y]）．X をパラコンパクトな σ空間とする．もし，任意の自然数 n に対して X^n が可算 *tightness* をもつならば，$\Sigma^{\kappa}X$ は，正規である．

Elementary submodel を用いた Σ 積の正規性の証明の簡単な例として，可算離散空間は，いくつ Σ 積をとっても正規であることを示そう．

（例）$\Sigma = \Sigma^{\kappa}\omega$ は，正規である．

（証） 簡単のため，Σ の base point を $0 = (0, \ldots, 0)$ とする．F, H を Σ の交わらない閉集合とする．Elementary submodel の性質 (a) より，$\{\kappa, F, H\} \subset M$ をみたす可算 elementary submodel M が存在する．$A = \kappa \cap M$ と定義すると，A は，可算集合である．$\pi_A : \Sigma \to \omega^A$ を射影とする．次の $(*)$ を証明すれば十分である．

$$(*)\ \text{cl}_{\omega^A}\pi_A(F) \cap \text{cl}_{\omega^A}\pi_A(H) = \emptyset$$

なぜならば $(*)$ を仮定すると，距離空間 ω^A の二つの閉集合

$$\text{cl}_{\omega^A}\pi_A(F),\ \text{cl}_{\omega^A}\pi_A(H)$$

は，ω^A の開集合 U, V で，分離できる．したがって，$\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(V)$ が F, H を分離する開集合となり証明が終わる．

背理法によって，$(*)$ を証明する．もし，

$$f \in \text{cl}_{\omega^A}\pi_A(F) \cap \text{cl}_{\omega^A}\pi_A(H)$$

をみたす f が存在したと仮定する．$f' \in \Sigma$ を，

$$f'(\alpha) = \begin{cases} f(\alpha) & \text{if } \alpha \in A \\ 0 & \text{if } \alpha \in \kappa - A \end{cases}$$

と定義する．このとき，$f' \in \mathrm{cl}_\Sigma F \cap \mathrm{cl}_\Sigma H$ が示せれば，F, H が交わらない閉集合であることに矛盾する．

$f' \in \mathrm{cl}_\Sigma F$ のみを示す．$f' \in \mathrm{cl}_\Sigma H$ も全く同様に証明できる．U を f' の Σ における任意の開近傍とする．

$$\begin{aligned} U &= U(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \ldots, \beta_m; k_0, \ldots, k_n, 0, \ldots, 0) \\ &= \{q \in \Sigma : \text{各 } i \leq n, j \leq m \text{ に対して } q(\alpha_i) = k_i, q(\beta_j) = 0\}, \end{aligned}$$

各 $i \leq n, j \leq m$ に対して

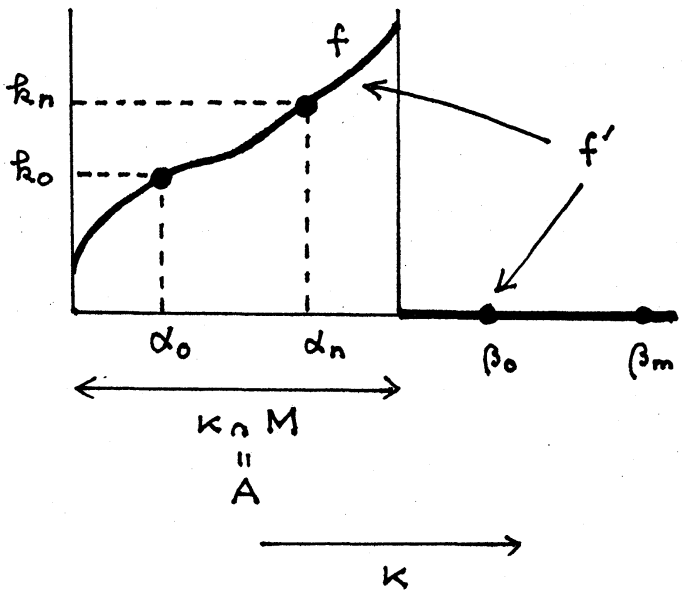
$$\alpha_i \in A,\ \beta_j \in \kappa - A,$$

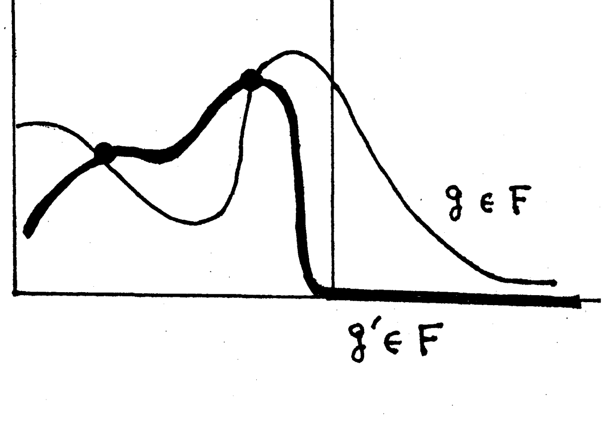
という形だと仮定できる．すると，

$$\begin{aligned} V &= \pi_A(U) \\ &= \{r \in \omega^A : r(\alpha_i) = k_i\} \end{aligned}$$

は，f の ω^A における近傍なので，仮定より，$h \in V \cap \pi_A(F)$ をみたす h が存在する．したがって，$h = \pi_A(g)$ をみたす $g \in F$ が存在する．まとめると，

$$V \models \exists g \in F\,(g(\alpha_0) = k_0, \ldots, g(\alpha_n) = k_n).$$





$F, \alpha_i, k_i \in M$ と，M の elementary 性より，

$$\dot{M} \models \exists g \in F\,(g(\alpha_0) = k_0, \ldots, g(\alpha_n) = k_n).$$

$M \models \phi$ の定義より，

$$M \models g \in F\,(g(\alpha_0) = k_0, \ldots, g(\alpha_n) = k_n)$$

をみたす $g \in M$ が存在する．そのような g の 1 つを g' とすると，$g' \in M$ で，再び elementary 性より，

$$V \models g' \in F\,(g'(\alpha_0) = k_0, \ldots, g'(\alpha_n) = k_n).$$

support g' は，$g' \in M$ を用いて一意的に定義できるので，elementary submodel の性質 (b) より，support $g' \in M$ で，さらに，Σ 積の要素 g' に対する support g' の可算性と，elementary submodel の性質 (c) より，support $g' \subset M$ を得る．したがって，

$$\text{support}\, g' \subset \kappa \cap M = A.$$

したがって，

$$\text{任意の } j \leq m \text{ に対して}, g'(\beta_j) = 0.$$

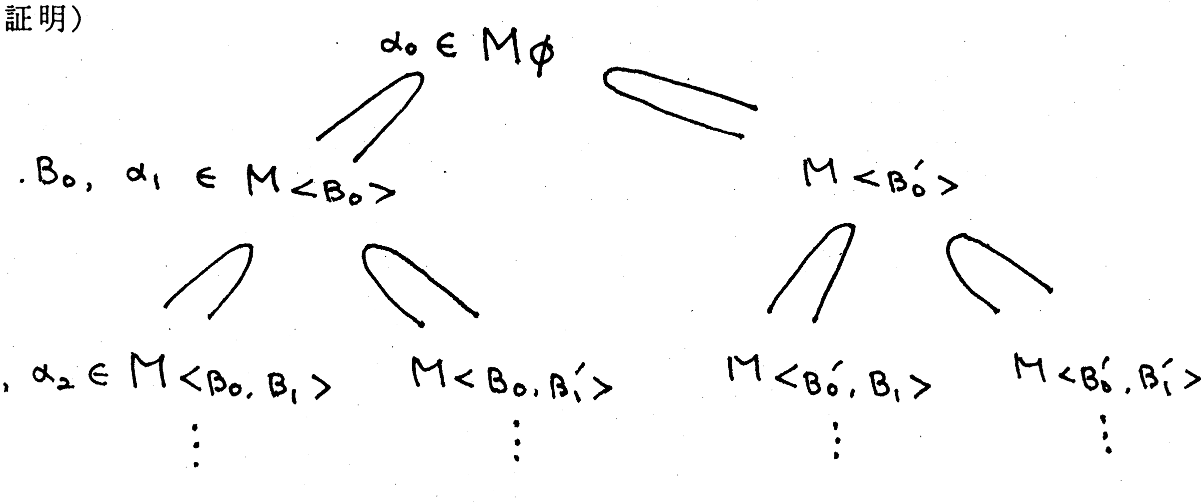
ゆえに $g' \in U \cap F$. 以上より $f' \in \mathrm{cl}_{\Sigma} F$ が証明された．∎

4. 距離空間の Σ 積の正規性

Watson [W] は，距離空間の Σ 積の正規性を，elementary submodel の言葉を用いて証明できるかという問題を出している．ここでは，可算 elementary submodel からなる tree の構成を用いて，解答例を示す．詳細は，参考文献 [T] を見られたい．

<u>定理</u>. X が距離空間のとき，Σ 積，$\Sigma = \Sigma^{\kappa} X$ は，正規である．

（証明）



$p \in X^\kappa$ を Σ の base point, $\mathcal{B} = \bigcup_{i\in\omega}\mathcal{B}_i$ を X の基で，各 $\mathcal{B}_i$ が，discrete であるものとする．Σ の 2 つの交わらない閉集合 F, H が，開集合で分離できることを示す．${}^{<\omega}\mathcal{B}$ を，$\mathcal{B}$ に属する要素からなる有限列 $\mathbf{B} = \langle B_0, \dots, B_{n-1}\rangle$ 全体とする．可算 elementary submodel の族 $\{M_{\mathbf{B}} : \mathbf{B} \in {}^{<\omega}\mathcal{B}\}$ を，次の条件をみたすように構成する．

(1) $\{X, \kappa, p, F, H, \{\mathcal{B}_i : i \in \omega\}\} \subset M_\emptyset$;
(2) 任意の $\mathbf{B} \in {}^{<\omega}\mathcal{B}$ に対して，$\mathbf{B} \in M_{\mathbf{B}}$;
(3) 任意の $\mathbf{B}, \mathbf{B}' \in {}^{<\omega}\mathcal{B}$ に対して，$\mathbf{B} \subset \mathbf{B}'$ ならば，$M_{\mathbf{B}} \subset M_{\mathbf{B}'}$.

そこで，

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} = \{U = U(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}; B_0, \dots, B_{n-1}) : n \in \omega,\\
\text{各 } i < n \text{ に対して}, \alpha_i \in M_{\langle B_0, \dots, B_{i-1}\rangle}, U \cap H = \emptyset\};\\
\mathcal{V} = \{U = U(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}; B_0, \dots, B_{n-1}) : n \in \omega,\\
\text{各 } i < n \text{ に対して}, \alpha_i \in M_{\langle B_0, \dots, B_{i-1}\rangle}, U \cap F = \emptyset\}
\end{aligned}$$

と定義すると，$\mathcal{U}, \mathcal{V}$ は，Σ の σ-discrete な開集合族で，

$$F \subset \cup\mathcal{U} \subset X - H,$$

$$H \subset \cup\mathcal{V} \subset X - F$$

が示せる．これより，F, H が開集合で分離できることがわかる．∎

5．Lašnev 空間の Σ 積の正規性

距離空間の連続閉写像による像を <u>Lašnev 空間</u>とよぶ．<u>Sequential fan</u> $S(\kappa)$ は，κ 個の収束点列の位相和において，極限点を一点に縮めた空間であり，最も簡単な Lašnev 空間の例である．距離空間のΣ 積は，前節で見た通り正規であるが，Lašnev 空間の Σ 積が，正規となるかどうかは，わかっていない．

<u>問題</u>（児玉）．X が *Lašnev* 空間のとき，Σ 積，$\Sigma = \Sigma^\kappa X$ は，正規か．

Lašnev 空間は，パラコンパクトな σ 空間なので，3 節の矢島の定理が使えそうだが，残念ながら Lašnev 空間の積は，可算 tightness をもつとは限らない．例えば，$S(\omega_1) \times S(\omega_1)$ は，可算 tightness をもたない．したがって矢島の定理の条件がみたされない．今まで知られている Σ 積の正規性に関する定理は，すべて部分有限積の可算 tightness 性を用いたものであった．しかし，次の定理は，可算 tightness の条件がなくても正規となりうることを示している．

<u>定理</u>（Todorčević, 玉野）．$\Sigma^\kappa S(\omega_1)$ は，正規である．

この証明には，次の補題を用いる．直観的にいえば，可算 tightness が崩れているときには普通は困ってしまうが，この場合では，ある種の局所有限性が存在するので救われるということである．

<u>補題</u>. $n \in \omega, X = S(\omega_1)^n, p \in X, A \subset X$ で，$p \in \mathrm{cl}\, A$ だが，任意の可算部分集合 $B \subset A$ に対して，$\neg(p \in \mathrm{cl}\, B)$ とする．このとき，p の，開近傍の族 $\{U(\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ で，A の各点で，局所有限であるものが存在する．

<u>問題</u>.

(1) κ が非可算のとき $\Sigma^\kappa S(\omega_2)$ は，正規か．とくにその閉集合に同相な $S(\omega_2) \times S(\omega_2) \times \omega_1$ は，正規か．ただし，ω_1 には，順序位相が入っているものとする．

(2) X が *Lašnev* 空間で，*weight* あるいは濃度が ω_1 ならば，$\Sigma^\kappa X$ は，正規か．

参考文献

[B] J. E. Baumgartner, *Applications of the proper forcing axiom*, in "Handbook of Set-Theoretic Topology (K. Kunen and J. E. Vaughan, eds.)," North-Holland, 1984, pp. 913-959.

[D] A. Dow, *An introduction to applications of elementary submodels to topology*, Topology Proc. **13** (1988), 17-72.

[K] K. Kunen, "Set Theory," North-Holland, 1980.

[T] K. Tamano, *A proof of normality of* Σ*-products of metrizable spaces by elementary submodels.* (March 1992, notes)

[W] S. Watson, *The Construction of Topological Spaces: Planks and Resolutions.* (to appear)

[Y] Y. Yajima, *The normality of* Σ*-products and the perfect* κ*-normality of cartesian products*, J. Math. Soc. Japan **36** (1984), 689-699.